آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **حسابان**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۱ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

۱ اگر $f(x) = -|x-۱|$ و $g(x) = [۲x-۳]$، آنگاه حاصل $(\frac{g}{f})(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۲ تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر را مشخص کنید و حاصل‌جمع ریشه‌ها را به دست آورید.

$$(x^۲+x-۱)^۲ - x^۲ - x - ۵ = ۰$$

۳ اگر $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$ باشد دامنه و ضابطهٔ $\frac{f}{g}(x)$ را به دست آورده و آن را رسم کنید.

۴ نمودار تابع $y = \frac{۲^{۳x-۱}}{۳^{۲x-۱}}$ را رسم کنید.

۵ معادلهٔ خط $۲x + y = ۸$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۵}$ مماس است. مرکز این دایره بر روی خطی به معادلهٔ $y = ۲x - ۱$ قرار دارد. مرکز دایره را بیابید.

۶ x را در معادلهٔ $۳^{x+۱} + ۳^{x} = ۳۶$ به دست آورید.

معادلات زیر را حل کنید.

۷

$$\left(x - \sqrt{x^{۲} - ۴}\right)^{۴}\left(x + \sqrt{x^{۲} - ۴}\right)^{۲} = ۱۶$$

۸

$$(\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}})^{x}+(\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}})^{x}=۶$$

دامنه توابع زیر را بیابید.

۹

$$f(x)=\frac{\sqrt{۸x-۲x^{۲}}}{|x|-[x]}$$

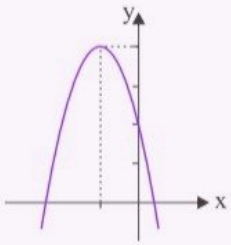
۱۰

$$f(x)=\frac{۲x}{|۲x-۱|-x+۲}$$

۱۱ a را طوری تعیین کنید که توابع $f(x)=|x-۱|$ و $g(x)=a-|x+۲|$ بی‌شمار نقطهٔ مشترک داشته باشند.

۱۲ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \log_{۲}\left(\frac{۲^{x} + ۳}{۲^{(x+۱)} - ۴}\right)$ را به دست آورید.

۱۳ نمودار سهمی $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. جواب‌های معادلهٔ $f(x)^{۲} + ۱۲f(x) = ۲۸$ را به دست آورید. (هر فاصله را یک واحد روی محور در نظر بگیرید)



۱۴ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x - ۲| + |۳x - ۳| \leq ۱$ را مشخص کنید.

۱۵ دو تابع $f(x) = \frac{۷}{x - ۳}$ و $g(x) = \frac{ax + b}{x^۲ + cx + d}$ باهم برابر هستند. مقادیر a, b, c, d را به دست آورید.

۱۶ حاصل $۲۵^{\log_{\frac{۱}{۵}} x} + ۰/۱^{\log x}$ را به دست آورید.

۱۷ دامنهٔ تابع $f(x) = \log[x^۲ - ۲۴]$ را به دست آورید ([ ]، نماد جزء صحیح است).

۱۸ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، نشان دهید:

$$S = \frac{-b}{a} \ , \ P = \frac{c}{a}$$

۱۹ نقاط $A(۲, k)$ و $B(-۱, -۱)$ و $C(۴, ۱)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر طول میانهٔ BM برابر با ۵ باشد، k چه اعدادی می‌تواند باشد؟

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۲۰

$$\sqrt{\sqrt{۶-۴\sqrt{۲}}+\sqrt{۶+۴\sqrt{۲}}}$$

۲۱

$$\sqrt{\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}}$$

۲۲

$$\sqrt{\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}+\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}$$

۲۳ حاصل عبارت $A = \frac{t^{۲} - t^{۵} + t^{۸} - \cdots + t^{۲۰}}{t^{۳} + t^{۹} + t^{۱۵} + t^{۲۱}}$ را به ازای $t = \sqrt[۳]{۲}$ به دست آورید.

۲۴ توابع $f(x) = \sqrt{۴ - x^{۲}}$ و $g(x) = \frac{x}{x - ۱}$ مفروض‌اند. دامنهٔ تابع fog را بیابید.

۲۵ به روش هندسی، تعداد جواب‌های معادلات زیر را حساب کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

الف

$$|\log(x-۲)| = \frac{x+۱}{x}$$

ب

$$\log|x| = |x^۲ - ۲|$$

۲۶ نمودار تابع $y = ۲ - (\frac{۳}{۴})^{-x}$ را رسم کنید.

۲۷ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\log(x^۲+۱) = \log ۲ \log ۴ + \log ۲ \log \frac{۵}{۲}$$

ب

$$\log_۲^{(۱+۳+۵+...+۲n-۱)} = ۴ + \log_۲^{(۲n)}$$

۲۸ کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴, ۰)$ از نقاط نمودار $y = \sqrt{x + ۱}$ چقدر است؟

۲۹ نمودار تابع $y = \frac{۱}{|x| - ۱}$ را رسم کنید.

۳۰ معادلهٔ زیر را حل کنید.

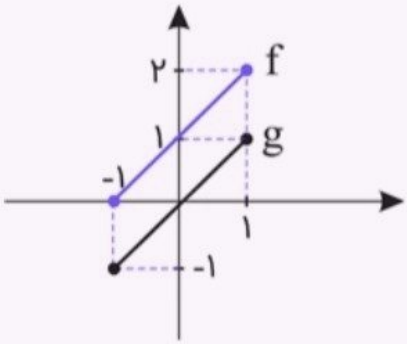
$$(\sqrt{۳} - ۱)x^۲ + (\sqrt{۳} + ۱)x + ۲ = ۰$$

۳۱ در دنبالهٔ حسابی $۱, ۵, ۹, ..., ۴۰۱$:

الف مجموع جملات دنباله را به دست آورید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۲ نمودار توابع f و g به‌صورت زیر است. دامنهٔ تابع gof را بیابید.



۳۳ نمودار تابع $y = x[x]\,|x|$ را در بازهٔ $[-۱, ۲]$ رسم کنید.

۳۴ فاصلهٔ دو خط $\frac{۴}{۹}x + \frac{y}{۳} - ۱ = ۰$ و $۳y = -۴x - ۳$ را به دست آورید و معادلهٔ خطی که با این دو خط موازی می‌باشد و از دو خط به یک فاصله است را بیابید.

۳۵ جواب‌های صحیح معادلهٔ $۳\sqrt{x^۲} + \frac{\sqrt{۴ - x^۲}}{۲\sqrt{x + ۳}} = ۱۰ - x^۲$ را به دست آورید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۶ دو نقطه روی خط $y = ۳x - ۱$ وجود دارد که مجموع فواصل آن‌ها از نقاط $(۱, ۲)$ و $(۵, ۱۴)$ برابر $۸\sqrt{۱۰}$ است. مجموع طول دو نقطه را پیدا کنید.

۳۷ معادلهٔ $۹^x = ۲ \times ۳^{x+۲} - ۴۵$ را حل کنید.

۳۸ برد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x} + ۲}{\sqrt{x} - ۳}$ را تعیین کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱

$$f(\frac{۱}{۲}) = -|\frac{۱}{۲} - ۱| = -|-\frac{۱}{۲}| = -\frac{۱}{۲}$$

$$g(\frac{۱}{۲}) = [۲(\frac{۱}{۲}) - ۳] = [۱ - ۳] = [-۲] = -۲$$

$$(\frac{g}{f})(\frac{۱}{۲}) = \frac{g(\frac{۱}{۲})}{f(\frac{۱}{۲})} = \frac{-۲}{-\frac{۱}{۲}} = ۴$$

۲

$$(x^۲ + x - ۱)^۲ - x^۲ - x - ۵ = ۰ \Rightarrow ((x^۲ + x) - ۱)^۲ - (x^۲ + x) - ۵ = ۰$$

حال $x^۲ + x = t$ در نظر می‌گیریم و معادله را برحسب t می‌نویسیم:

$$(t - ۱)^۲ - t - ۵ = ۰ \Rightarrow t^۲ - ۲t + ۱ - t - ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow t^۲ - ۳t - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۱ \\ t = ۴ \end{cases}$$

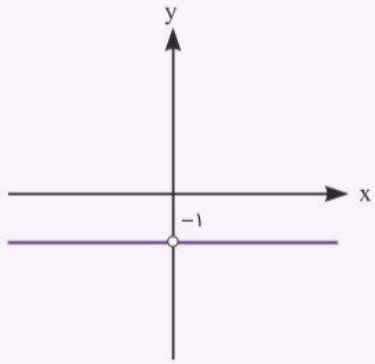
$x^۲ + x = -۱ \Rightarrow x^۲ + x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰$ معادله جواب ندارد.

$x^۲ + x = ۴ \Rightarrow x^۲ + x - ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰$ ۲ جواب داریم.

حاصل‌جمع ریشه‌ها:

$$S = -\frac{b}{a} = -۱$$

۳

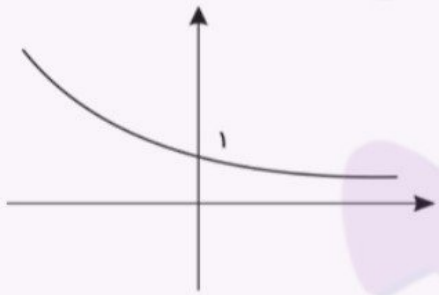


$$\frac{f}{g}(x) = \frac{|x|}{-|x|} = \begin{cases} -۱ & ; x > ۰ \\ -۱ & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$D = R - \{۰\}$$

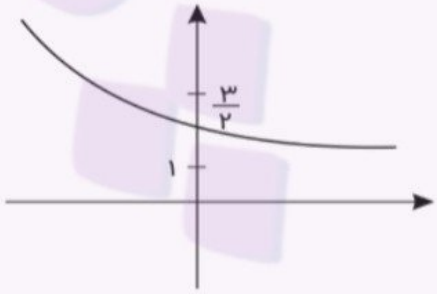
۴

$$y = \frac{۲^{۳x-۱}}{۳^{۲x-۱}} = \frac{\frac{۲^{۳x}}{۲^{۱}}}{\frac{۳^{۲x}}{۳^{۱}}} = \frac{\frac{۸^{x}}{۲}}{\frac{۹^{x}}{۳}} = \frac{۳}{۲} \times (\frac{۸}{۹})^{x}$$



$y = (\frac{۸}{۹})^{x}$

عرض‌های نمودار را ۱/۵ برابر می‌کنیم.



۵ تمام نقاط روی خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۱$، به‌صورت $(\alpha\ ,\ ۲\alpha - ۱)$ قرار دارد. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مفروض، برابر $\sqrt{۵}$ است. پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x + y - ۸ = ۰ \\ (\alpha\ ,\ ۲\alpha - ۱) \end{cases} \Rightarrow \frac{|۲(\alpha) + (۲\alpha - ۱) - ۸|}{\sqrt{۴ + ۱}} = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{|۴\alpha - ۹|}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵} \Rightarrow |۴\alpha - ۹| = ۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴\alpha - ۹ = ۵ \Rightarrow \alpha = \frac{۷}{۲} \\ ۴\alpha - ۹ = -۵ \Rightarrow \alpha = ۱ \end{cases}$$

مرکز دایره دو نقطه می‌تواند باشد: $(۱\ ,\ ۱)$ و $(\frac{۷}{۲}\ ,\ ۶)$

۶

$$۳^{x+۱} + ۳^x = ۳۶ \Rightarrow ۳^x \times ۳^۱ + ۳^x = ۳۶ \Rightarrow ۳^x(۳ + ۱) = ۳۶$$

$$۳^x \times ۴ = ۳۶ \Rightarrow ۳^x = \frac{۳۶}{۴} = ۹ \Rightarrow ۳^x = ۹ \Rightarrow ۳^x = ۳^۲ \Rightarrow x = ۲$$

پاسخ سؤالات ۷ تا ۸

۷

$$\underbrace{(x - \sqrt{x^۲ - ۴})^۲ (x + \sqrt{x^۲ - ۴})^۲}(x - \sqrt{x^۲ - ۴})^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow (x^۲ - x^۲ + ۴)^۲ (x - \sqrt{x^۲ - ۴})^۲ = ۱۶ \Rightarrow ۱۶(x - \sqrt{x^۲ - ۴})^۲ = ۱۶ \Rightarrow (x - \sqrt{x^۲ - ۴})^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^۲ - ۴} = ۱ \Rightarrow \sqrt{x^۲ - ۴} = x - ۱ \xrightarrow{x \geq ۱} x^۲ - ۴ = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \\ x - \sqrt{x^۲ - ۴} = -۱ \Rightarrow \sqrt{x^۲ - ۴} = x + ۱ \xrightarrow{x \geq -۱} x^۲ - ۴ = x^۲ + ۲x + ۱ \Rightarrow x = -\frac{۵}{۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۸ می‌دانیم $\sqrt{۳ - ۲\sqrt{۲}} \times \sqrt{۳ + ۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۹ - ۸} = ۱$، یعنی دو عبارت سمت چپ معکوس یکدیگرند.
پس قرار می‌دهیم $(\sqrt{۳ - ۲\sqrt{۲}})^x = t$ و داریم:

$$t + \frac{۱}{t} = ۶ \xrightarrow{\times t} t^۲ - ۶t + ۱ = ۰$$

$$t = \frac{۶ \pm \sqrt{۳۶ - ۴}}{۲} = \frac{۶ \pm ۴\sqrt{۲}}{۲} = ۳ \pm ۲\sqrt{۲}$$

$$(\sqrt{۳ - ۲\sqrt{۲}})^x = ۳ - ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \left(۳ - ۲\sqrt{۲}\right)^{\frac{x}{۲}} = ۳ - ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲} = ۱ \Rightarrow x = ۲$$

$$(\sqrt{۳ - ۲\sqrt{۲}})^x = ۳ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow (۳ - ۲\sqrt{۲})^{\frac{x}{۲}} = (۳ - ۲\sqrt{۲})^{-۱} \Rightarrow \frac{x}{۲} = -۱ \Rightarrow x = -۲$$

دقت کنید چون دو عدد معکوس یکدیگرند، داریم: $(۳ + ۲\sqrt{۲}) = (۳ - ۲\sqrt{۲})^{-۱}$

پاسخ سؤالات ۹ تا ۱۰

۹ برای تعیین دامنهٔ تعریف تابع فوق، شرایط زیر باید لحاظ شود:

$$1)\ 8x - 2x^2 \geq 0$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

۲) $|x| - [x] = 0 \Rightarrow |x| = [x]$: مشخص است که دو طرف این رابطه برای اعداد صحیح نامنفی مانند ۰، ۱، ۲، ۳ و ... باهم برابر می‌شوند که قابل‌قبول نیستند.

پس دامنهٔ تابع عبارت است از:

$$D_f = (0, 4) - \{1, 2, 3\}$$

۱۰ برای تعیین دامنه لازم است عبارت مخرج کسر را مخالف صفر قرار دهیم، بنابراین:

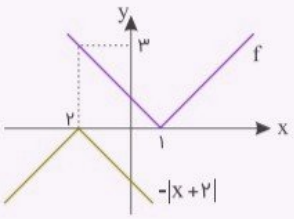
$$|2x - 1| - x + 2 = 0 \Rightarrow |2x - 1| = x - 2$$

برای اینکه بتوانیم قدر مطلق را برداریم لازم است طرف دوم یعنی $x - 2 \geq 0$، پس $x \geq 2$؛ بنابراین:

$$2x - 1 = \pm(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x - 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \\ 2x - 1 = -x + 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

پس هیچ عددی مخرج را صفر نمی‌کند و دامنهٔ تعریف تابع عبارت است از: $D_f = \mathbb{R}$

۱۱ f و g را رسم می‌کنیم:



اگر $a = 3$ باشد، بخشی از f و g بر هم منطبق می‌شوند.

۱۲ اول سعی می‌کنیم 2^x را برحسب y بنویسیم:

$$y = \log_2\left(\frac{2^x + 3}{2(2^x) - 4}\right) \Rightarrow 2^y = \frac{2^x + 3}{2(2^x) - 4} \xrightarrow{2^x = t} 2^y = \frac{t + 3}{2t - 4}$$

$$\Rightarrow 2t(2^y) - 4(2^y) - t - 3 = 0 \Rightarrow t(2^{(y+1)} - 1) = 2^{(y+2)} + 3 \Rightarrow t = \frac{2^{(y+2)} + 3}{2^{(y+1)} - 1}$$

$$2^x = \frac{2^{(y+2)} + 3}{2^{(y+1)} - 1} \xrightarrow[\text{در مبنای ۲ می‌گیریم}]{\text{از دو طرف لگاریتم}} x = \log_2\left(\frac{2^{(y+2)} + 3}{2^{(y+1)} - 1}\right)$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = \log_2\left(\frac{2^{(x+2)} + 3}{2^{(x+1)} - 1}\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{2^{(x+2)} + 3}{2^{(x+1)} - 1}\right)$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۳ ضابطهٔ سهمی با رأس (x_S, y_S) به‌صورت $f(x) = a(x - x_S)^۲ + y_S$ است. در اینجا رأس سهمی، نقطهٔ $(-۱, ۴)$ است، پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $f(x) = a(x + ۱)^۲ + ۴$ است. نقطهٔ $(۰, ۲)$ روی این سهمی است، پس:

$$f(۰) = ۲ \Rightarrow a + ۴ = ۲ \Rightarrow a = -۲$$

درنتیجه ضابطهٔ سهمی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$f(x) = -۲(x + ۱)^۲ + ۴$$

حال معادلهٔ داده شده را حل می‌کنیم:

$$f(x)^۲ + ۱۲f(x) - ۲۸ = ۰$$
$$\Rightarrow (f(x) - ۲)(f(x) + ۱۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲ \\ f(x) = -۱۴ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} f(x) = ۲ \Rightarrow -۲(x + ۱)^۲ + ۴ = ۲ \Rightarrow (x + ۱)^۲ = ۱ \Rightarrow x + ۱ = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۲ \end{cases} \\ f(x) = -۱۴ \Rightarrow -۲(x + ۱)^۲ + ۴ = -۱۴ \Rightarrow (x + ۱)^۲ = ۹ \Rightarrow x + ۱ = \pm ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۴ \end{cases} \end{cases}$$

۱۴ ریشه‌های داخل قدرمطلق عبارتند از ۲ و ۱. حال برای از بین بردن قدرمطلق‌ها، تعیین‌علامت (بازه‌بندی) می‌کنیم:

	I	۱	II	۲	III
x-۲	-		-	۰	+
۳x-۳	-	۰	+		+

$$\begin{cases} \text{I)}\ x \le ۱ \Rightarrow ۲ - x + ۳ - ۳x \le ۱ \Rightarrow -۴x + ۵ \le ۱ \Rightarrow -۴x \le -۴ \Rightarrow x \ge ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک بازه‌ها}} x = ۱ \\ \text{II)}\ ۱ < x < ۲ \Rightarrow ۲ - x + ۳x - ۳ \le ۱ \Rightarrow ۲x - ۱ \le ۱ \Rightarrow ۲x \le ۲ \Rightarrow x \le ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک بازه‌ها}} \varnothing \\ \text{III)}\ x \ge ۲ \Rightarrow x - ۲ + ۳x - ۳ \le ۱ \Rightarrow ۴x - ۵ \le ۱ \Rightarrow ۴x \le ۶ \Rightarrow x \le \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک بازه‌ها}} \varnothing \end{cases}$$

پس $x = ۱$ تنها جواب نامعادله است.

۱۵

$$D_f = \mathbb{R} - \{۳\}$$

D_g باید با D_f برابر باشد.

$$x^۲ + cx + d = (x - ۳)^۲ = x^۲ - ۶x + ۹$$
$$\Rightarrow c = -۶\ ,\ d = ۹$$

حال دو ضابطه را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{ax + b}{(x - ۳)^۲} = \frac{۷}{x - ۳} \Rightarrow ax + b = ۷x - ۲۱$$
$$\Rightarrow a = ۷\ ,\ b = -۲۱$$

۱۶

$$۲۵^{\log_{\frac{۱}{۵}} x} = x۲۵^{\log_{\frac{۱}{۵}} ۲۵} = x^{\log_{۵^{-۱}} ۵^۲} = x^{-۲} = \frac{۱}{x^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{x} = \frac{x+۱}{x^۲}$$

$$۰/۱^{\log x} = x^{\log} = x^{-۱} = \frac{۱}{x}$$

۱۷ نکته: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $\log_{g(x)}^{f(x)}$ باید شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$f(x) > ۰ \ , \ g(x) > ۰ \ , \ g(x) \neq ۱$$

پس داریم:

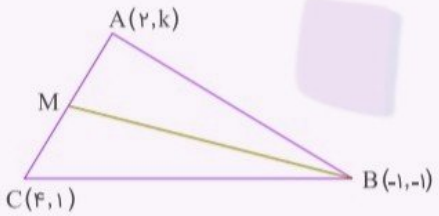
$$[x^۲ - ۲۴] > ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲۴ \geq ۱ \Rightarrow x^۲ \geq ۲۵ \Rightarrow |x| \geq ۵ \Rightarrow D_f = (-\infty, -۵] \cup [۵, +\infty)$$

۱۸

$$S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲b}{۲a} = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_۱x_۲ = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{۲a} \times \frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{۲a} = \frac{b^۲ - \Delta}{۴a^۲} = \frac{b^۲ - b^۲ + ۴ac}{۴a^۲} = \frac{۴ac}{۴a^۲} = \frac{c}{a}$$

۱۹ شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$M = (۳, \frac{k+۱}{۲})$$

فاصلهٔ B تا M باید برابر با ۵ باشد:

$$BM = ۵ \Rightarrow \sqrt{(۳+۱)^۲ + (\frac{k+۱}{۲} + ۱)^۲} = ۵$$

$$\Rightarrow ۱۶ + (\frac{k+۳}{۲})^۲ = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} \frac{k+۳}{۲} = ۳ \Rightarrow k = ۳ \\ \frac{k+۳}{۲} = -۳ \Rightarrow k = -۹ \end{cases}$$

پاسخ سؤالات ۲۰ تا ۲۲

۲۰

$$\sqrt{\sqrt{۶-۴\sqrt{۲}}+\sqrt{۶+۴\sqrt{۲}}}=\sqrt{\sqrt{\left(۲-\sqrt{۲}\right)^{۲}}+\sqrt{\left(۲+\sqrt{۲}\right)^{۲}}}$$
$$=\sqrt{\left|۲-\sqrt{۲}\right|+\left|۲+\sqrt{۲}\right|}=\sqrt{۲-\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}}=\sqrt{۴}=۲$$

۲۱

$$\sqrt{\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}}=\sqrt{\sqrt{\left(۱+\sqrt{۳}\right)^{۲}}-\sqrt{\left(۱-\sqrt{۳}\right)^{۲}}}$$
$$=\sqrt{\left|۱+\sqrt{۳}\right|-\left|۱-\sqrt{۳}\right|}=\sqrt{۱+\sqrt{۳}+۱-\sqrt{۳}}=\sqrt{۲}$$

۲۲

$$\sqrt{\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}+\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}=\sqrt{\sqrt{\left(۲-\sqrt{۳}\right)^{۲}}+\sqrt{\left(۱+\sqrt{۳}\right)^{۲}}}$$
$$=\sqrt{\left|۲-\sqrt{۳}\right|+\left|۱+\sqrt{۳}\right|}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}+۱+\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

۲۳

$$A=\frac{t^{۲}-t^{۵}+t^{۸}-\cdots+t^{۲۰}}{t^{۳}+t^{۹}+t^{۱۵}+t^{۲۱}}$$
$$\Rightarrow A=\frac{\dfrac{t^{۲}\left(۱-\left(-t^{۳}\right)^{۷}\right)}{۱-\left(-t^{۳}\right)}}{\dfrac{t^{۳}\left(۱-\left(t^{۶}\right)^{۴}\right)}{۱-\left(t^{۶}\right)}}=\frac{\dfrac{t^{۲}\left(۱+t^{۲۱}\right)}{۱+t^{۳}}}{\dfrac{t^{۳}\left(۱-t^{۲۴}\right)}{۱-t^{۶}}}=\frac{t^{۲}\left(۱+t^{۲۱}\right)\left(۱-t^{۶}\right)}{t^{۳}\left(۱-t^{۲۴}\right)\left(۱+t^{۳}\right)}$$
$$=\frac{t^{۲}\left(۱+t^{۲۱}\right)\left(۱-t^{۳}\right)\left(۱+t^{۳}\right)}{t^{۳}\left(۱-t^{۲۴}\right)\left(۱+t^{۳}\right)}=\frac{\left(۱+t^{۲۱}\right)\left(۱-t^{۳}\right)}{t\left(۱-t^{۲۴}\right)}$$

حال $t=\sqrt[۳]{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow A=\frac{\left(۱+\sqrt[۳]{۲}^{۲۱}\right)\left(۱-\sqrt[۳]{۲}^{۳}\right)}{\sqrt[۳]{۲}\left(۱-\sqrt[۳]{۲}^{۲۴}\right)}=\frac{\left(۱+۲^{۷}\right)\left(۱-۲\right)}{\sqrt[۳]{۲}\left(۱-۲^{۸}\right)}=\frac{-\left(۱+۱۲۸\right)}{\sqrt[۳]{۲}\left(۱-۲۵۶\right)}=\frac{-۱۲۹}{-۲۵۵\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۱۲۹}{۲۵۵\sqrt[۳]{۲}}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۴ برای تعیین دامنهٔ تابع fog از تعریف زیر استفاده می‌کنیم.

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

پس لازم است دامنهٔ توابع f و g را جداگانه به دست آوریم:

$$D_f:\ ۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \quad , \quad D_g:\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \{x = ۱ | -۲ \leq \frac{x}{x-۱} \leq ۲\}$$

برای حل نامعادلهٔ فوق از روش کلی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-۱} \leq ۲ \Rightarrow \frac{x}{x-۱} - ۲ \leq ۰ \Rightarrow \frac{x - ۲x + ۲}{x-۱} \leq ۰ \Rightarrow \frac{-x+۲}{x-۱} \leq ۰$$

X	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
		−	ت.ن	+	۰	−	

$$\Rightarrow (-\infty, ۱) \cup [۲, +\infty)$$

$$\frac{x}{x-۱} \geq -۲ \Rightarrow \frac{x}{x-۱} + ۲ \geq ۰ \Rightarrow \frac{x + ۲x - ۲}{x-۱} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۳x-۲}{x-۱} \geq ۰$$

X	$-\infty$		$\frac{۲}{۳}$		۱		$+\infty$
		+	۰	−	ت.ن	+	

$$\Rightarrow (-\infty, \frac{۲}{۳}] \cup (۱, +\infty)$$

اشتراک دو ناحیهٔ بالا عبارت است از $(-\infty, \frac{۲}{۳}] \cup [۲, +\infty)$ که دامنهٔ تعریف تابع fog محسوب می‌شود.

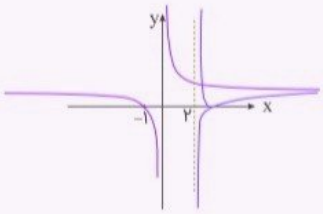
۲۵

الف

$$\begin{cases} y_1 = |\log(x-2)| \\ y_2 = \dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

برای رسم y_1، کافی است نمودار $y = \log x$ را دو واحد به سمت راست محور xها انتقال دهیم و قسمت‌های زیر این محور را نسبت به محور به بالا قرینه کنیم.

برای رسم y_2، کافی است نمودار $y = \dfrac{1}{x}$ را یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم. باتوجه‌به شکل زیر، معادله دارای دو ریشه است.

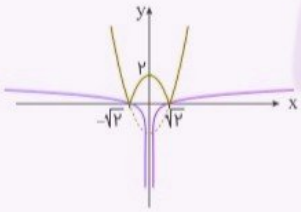


ب

$$\begin{cases} y_1 = \log|x| \\ y_2 = |x^2 - 2| \end{cases}$$

برای رسم y_1، باید ابتدا نمودار $y = \log x$ را رسم کنیم، سپس از روش رسم $f(|x|)$ عمل کنیم؛ یعنی سمت چپ محور yها را حذف کرده و سمت راست را با حفظ خودش، نسبت به محور yها قرینه کنیم.

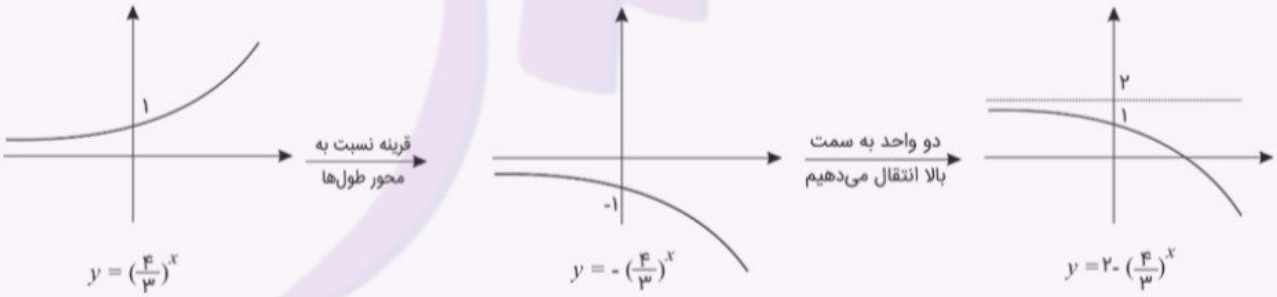
برای رسم y_2، کافی است نمودار $y = x^2$ را دو واحد به پایین منتقل کرده و قسمت زیر محور xها را به سمت بالا قرینه کنیم.



باتوجه‌به شکل، معادله ۴ ریشه دارد.

۲۶

$$y = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^{-x} = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^{x}$$



۲۷ الف

$$\log(x^2+1) = \log 2(\log 4 + \log\frac{5}{2}) \Rightarrow \log(x^2+1) = \log 2(\underbrace{\log 10}_{1})$$

$$\Rightarrow \log(x^2+1) = \log 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

ب مجموع اعداد فرد یک دنبالهٔ حسابی است با قدر نسبت ۲، پس:

$$۱+۳+۵+...+۲n-۱=\frac{n}{۲}(۱+(۲n-۱))=\frac{n}{۲}(۲n)=n^{۲}$$
$$\Rightarrow \log_{۲}^{n^{۲}}=۴+\log_{۲}^{(۲n)}\Rightarrow ۲\log_{۲}^{n}=۴+\log_{۲}^{۲}+\log_{۲}^{n}$$
$$\Rightarrow \log_{۲}^{n}=۵\Rightarrow n=۳۲$$

نکته:

$$\begin{cases}۱+۳+۵+...+۲n-۱=n^{۲}\\ ۲+۴+۶+...+۲n=n(n+۱)\end{cases}$$

۲۸ نقطه‌ای از نمودار $y=\sqrt{x+۱}$ که کمترین فاصله را از A دارد، $B(\alpha,\sqrt{\alpha+۱})$ در نظر می‌گیریم. حال فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را به دست می‌آوریم:

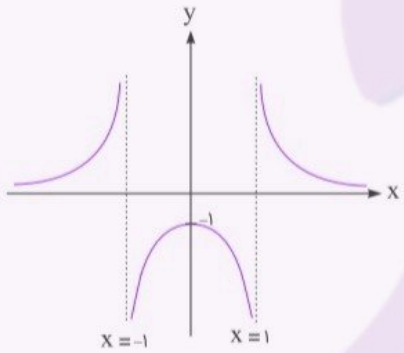
$$AB=\sqrt{(\alpha-۴)^{۲}+(\sqrt{\alpha+۱})^{۲}}=\sqrt{\alpha^{۲}-۸\alpha+۱۶+\alpha+۱}$$
$$=\sqrt{\alpha^{۲}-۷\alpha+۱۷}=\sqrt{(\alpha-\frac{۷}{۲})^{۲}+\frac{۱۹}{۴}}\quad(*)$$

برای اینکه AB کمترین مقدار شود، باید $\alpha=\frac{۷}{۲}$ باشد. بنابراین کمترین فاصله برابر است با:

$$AB=\sqrt{\frac{۱۹}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}$$

۲۹ برای رسم تابع داده‌شده، قدرمطلق را بازه‌بندی کرده و در دامنه، آن را ترسیم می‌کنیم:

$$f=\frac{۱}{|x|-۱}\ :\ \begin{cases}x\geq ۰: f=\frac{۱}{x-۱}\quad ,\mathbb{R}-\{۱\}\\ x<۰: f=\frac{۱}{-x-۱}\quad ,\mathbb{R}-\{-۱\}\end{cases}$$



۳۰ اگر در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$، داشته باشیم $a + c = b$، آنگاه معادله دارای ریشه‌های -۱ و $-\frac{c}{a}$ است.

حال در معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$a + c = b \Rightarrow (\sqrt{۳} - ۱) + ۲ = \sqrt{۳} + ۱$$

شرط فوق برای این معادله برقرار است، درنتیجه:

$$\begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = -\frac{c}{a} = \frac{-۲}{\sqrt{۳} - ۱} \times \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۳} + ۱} = -(\sqrt{۳} + ۱) \end{cases}$$

۳۱ الف

$$a_n = ۴n - ۳ \Rightarrow ۴n - ۳ = ۴۰۱ \Rightarrow ۴n = ۴۰۱ + ۳ \Rightarrow ۴n = ۴۰۴ \Rightarrow n = \frac{۴۰۴}{۴} = ۱۰۱$$

$$S_n = \frac{n \times (a_۱ + a_n)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times (۱ + ۴۰۱)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times ۴۰۲}{۲} = ۱۰۱ \times ۲۰۱ = ۲۰۳۰۱$$

یا:

$$S_n = \frac{n \times (۲a_۱ + (n - ۱) \times d)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times (۲ \times ۱ + (۱۰۱ - ۱) \times ۴)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times (۲ + ۴۰۰)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times ۴۰۲}{۲} = ۱۰۱ \times ۲۰۱ = ۲۰۳۰۱$$

۳۲ تعریف دامنهٔ تابع gof را می‌نویسیم: $D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$

از روی شکل مقادیر داخل مجموعه را مشخص می‌کنیم.

$$D_{gof} = \{-۱ \le x \le ۱ | -۱ \le f(x) \le ۱\}$$

از روی نمودار مشخص است که $f(x)$ در فاصلهٔ $[-۱, ۰]$ بین ۰ تا ۱ قرار می‌گیرد که مطلوب است، پس:

$$D_{gof} = \{-۱ \le x \le ۱ | -۱ \le x \le ۰\} = [-۱, ۰]$$

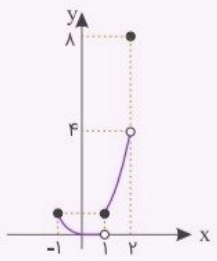
۳۳

$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow y = x(-۱)(-x) = x^۲$$

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow y = ۰$$

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow y = x^۲$$

$$x = ۲ \Rightarrow y = ۸$$



۳۴

$$\begin{cases} \frac{۴}{۹}x + \frac{y}{۳} - ۱ = ۰ \xrightarrow{\times ۹} ۴x + ۳y - ۹ = ۰ \\ ۳y = -۴x - ۳ \Rightarrow ۴x + ۳y + ۳ = ۰ \end{cases}$$

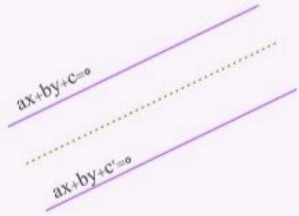
فاصلهٔ دو خط به معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$d = \frac{|۳ - (-۹)|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

معادلهٔ خطی موازی و هم‌فاصله با دو خط $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ برابر است با:

$$ax + by + \frac{c + c'}{۲} = ۰$$



$$۴x + ۳y + \frac{۳ + (-۹)}{۲} = ۰ \Rightarrow ۴x + ۳y - ۳ = ۰$$

۳۵ در عبارت $\sqrt{۴ - x^۲}$، به‌جای x تنها اعداد صحیح $-۲, -۱, ۰, ۱, ۲$ را می‌توان قرار داد.
چون این اعداد در دامنهٔ بقیهٔ عبارات هم تعریف شده است، آن‌ها را در معادله قرار می‌دهیم و هرکدام در معادله صدق کرد ریشهٔ معادله است.
فقط ۲ و ۲- در معادله صدق می‌کنند. بنابراین این دو عدد جواب معادله است.

۳۶ نقطه‌ای که روی خط $y = ۳x - ۱$ وجود دارد را به‌صورت $(x, ۳x - ۱)$ می‌نویسیم. فاصلهٔ این نقطه تا دو نقطهٔ $(۱, ۲)$ و $(۵, ۱۴)$ را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{(x-۱)^۲ + (۳x - ۱ - ۲)^۲} = \sqrt{(x-۱)^۲ + (۳x - ۳)^۲} = \sqrt{(x-۱)^۲ + ۹(x-۱)^۲} = \sqrt{۱۰(x-۱)^۲} = \sqrt{۱۰}\,|x - ۱|$$

$$\sqrt{(x-۵)^۲ + (۳x - ۱ - ۱۴)^۲} = \sqrt{(x-۵)^۲ + (۳x - ۱۵)^۲} = \sqrt{(x-۵)^۲ + ۹(x-۵)^۲} = \sqrt{۱۰(x-۵)^۲} = \sqrt{۱۰}\,|x - ۵|$$

$$\Rightarrow \cancel{\sqrt{۱۰}}\,|x - ۱| + \cancel{\sqrt{۱۰}}\,|x - ۵| = ۸\cancel{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow |x - ۱| + |x - ۵| = ۸$$

حال باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x > ۵ \Rightarrow x - ۱ + x - ۵ = ۸ \Rightarrow x = ۷ \\ ۱ \le x \le ۵ \Rightarrow \cancel{x} - \cancel{۱} - \cancel{x} + ۵ = ۸ \Rightarrow ۴ = ۸ \quad \text{غیرممکن} \\ x < ۱ \Rightarrow -x + ۱ - x + ۵ = ۸ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۷ - ۱ = ۶$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۷

$$۳^x = t \Rightarrow t^۲ = ۲ \times ۹t - ۴۵ \Rightarrow t^۲ - ۱۸t + ۴۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (t - ۳)(t - ۱۵) = ۰ \Rightarrow t = ۳ \text{ یا } ۱۵$$

$$\begin{cases} ۳^x = ۳ \Rightarrow x = ۱ \\ ۳^x = ۱۵ \Rightarrow x = \log_۳^{۱۵} \end{cases}$$

۳۸ برای تعیین برد، x را برحسب y تعیین می‌کنیم، یعنی:

$$y = \frac{\sqrt{x} + ۲}{\sqrt{x} - ۳} \Rightarrow \sqrt{x} + ۲ = y\sqrt{x} - ۳y \Rightarrow \sqrt{x} - y\sqrt{x} = -۳y - ۲$$

$$\sqrt{x}(۱ - y) = -۳y - ۲ \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-۳y - ۲}{۱ - y} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{۳y + ۲}{y - ۱}$$

سمت چپ عبارت فوق همواره مثبت است، پس عبارت سمت راست نیز باید چنین باشد، یعنی:

$$\frac{۳y + ۲}{y - ۱} \geq ۰$$

y	$-\infty$		$-\frac{۲}{۳}$		۱		$+\infty$
		$+$	۰	$-$	∞	$+$	

پس محدودهٔ برد تابع عبارت است از:

$$R_f = (-\infty, -\frac{۲}{۳}] \cup (۱, +\infty)$$